

|  |  |                                    |  |
|--|--|------------------------------------|--|
| ČESKÉ VYSOKÉ<br>UČENÍ TECHNICKÉ<br>V PRAZE |  | KATEDRA FYZIKY                     |  |
| LABORATORNÍ CVIČENÍ Z FYZIKY               |  |                                    |  |
| Jméno<br><b>Lukáš ČEŘOVSKÝ</b>             |  | Datum měření<br><b>15.4.2002</b>   |  |
| Stud. rok<br><b>2001/2002</b>              | Ročník<br><b>1</b>                               | Datum odevzdání<br><b>9.5.2002</b> |  |
| Stud. skupina<br><b>01</b>                 | Lab. skupina<br><b>3</b>                         | Klasifikace                        |  |
|  |  |                                    |  |
| Číslo úlohy<br><b>1a</b>                   | Název úlohy<br>Stanovení modulu pružnosti v tahu |                                    |  |

# Stanovení modulu pružnosti v tahu

## Úkol měření

Určete modul pružnosti v tahu přímou metodou pro dva vzorky různých materiálů a výsledky porovnejte s tabulkovými hodnotami.

Určete chybu měření.

## Obecná část

### **Hookův zákon:**

Při popisu tvaru a deformace tělesa lze vycházet z představy, že těleso je tvořeno mnoha elementárními částicemi, mezi nimiž působí síly, takže částice si mezi sebou udržují určitou vzdálenost. Působením vnější síly na takové těleso se mění rovnováha sil uvnitř a vzdálenosti mezi částicemi se mohou měnit. Dochází tak k deformaci tělesa, která může být tvarová nebo objemová. Při deformaci tvaru se zachovává objem tělesa, zatímco při deformaci objemu se mění objem a tím i jeho vnitřní struktura. Síla  $F$ , působící na povrch  $S$  po jeho normále vyvolá normálové mechanické napětí  $\sigma$ :

$$\frac{F}{S} = \sigma \text{ [N / m}^2\text{]}$$

Při změně rozměru tělesa z velikosti  $x_0$  na velikost  $x$  dochází k měrnému prodloužení  $e$ :

$$e = \frac{x - x_0}{x_0}$$

Měrné prodloužení je přímo úměrné normálovému napětí, pokud namáhání nepřekročí mez úměrnosti. Vztah mezi normálovým napětím a měrným prodloužením je při malých prodlouženích popsán Hookovým zákonem:

$$e = \frac{\sigma}{E}$$

kde  $E$  je Youngův modul pružnosti, vyjádřitelný jako:

$$E = \frac{\sigma}{e} = \frac{F}{S} \cdot \frac{l}{l_0 - l} \text{ [N / m}^2\text{]}$$

### **Zrcátková metoda:**

Vlastní měření bude provedeno tzv. *zrcátkovou metodou*, jelikož dochází jen k velmi malým délkovým změnám. Měření zrcátkovou metodou se provádí tak, že měřený drát o délce  $l$  a průměru  $d$  je napínán závažím o hmotnosti  $m$ , zavěšeným na konci páky  $P$  o délce  $q$ . Vzdálenost uchycení drátu od osy otáčení  $O$  je  $p$  (viz. obr.). Na ose otáčení páky je umístěno zrcátko  $Z$ , ve kterém se odráží stupnice. V důsledku zatížení páky se pootočí zrcátko o úhel  $\varphi$  a v dalekohledu bude nitkový kříž ukazovat místo původního  $n$  nové  $n_0$ . Pro případ, že prodloužení drátu  $\Delta l$  je mnohem menší než délka drátu  $l$ , je možné pro výpočet úhlu  $\varphi$  použít vztah:

$$\tan 2\varphi \cong 2\varphi = \frac{\Delta n}{a} \Rightarrow \varphi = \frac{\Delta n}{2a},$$

kde  $a$  je vzdálenost zrcátka od stupnice a  $\Delta n = n - n_0$ . Prodlouží-li se drát o  $\Delta l$ , pootočí se páka o  $P$  o úhel  $\varphi$ :

$$\tan \varphi \cong \varphi = \frac{\Delta l}{p}$$

Úhel v obou rovnicích je stejný, takže pro relativní prodloužení platí vztah:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{p \Delta n}{2al}$$

Dosazením relativního prodloužení do rovnice, vyjadřující Youngův modul pružnosti a dosazením za sílu  $F$  a průřez  $s$ :  $F = \frac{qG}{p}$  a  $S = \pi d^2 / 4$  vychází modul pružnosti:

$$E = \frac{8alq}{\pi d^2 p^2} \frac{G}{\Delta n}$$

Je velmi obtížné stanovit délku nezatíženého drátu, takže bude použita skupinová metoda (popř. metoda nejmenších čtverců). Potom:

$$E = \frac{8alq}{\pi d^2 p^2} \frac{\sum_i G_i}{\sum_i \Delta n_i}.$$

## Postup měření

Změření délky drátu kovovým měřítkem při základním zatížení s přesností na milimetry.

Změření délky páky  $q$  a vzdálenosti upevnění  $p$  drátu na páce  $P$  od osy otáčení  $O$  (5-krát).

Změření průměru drátů měřených vzorků mikrometrem (15-krát na různých místech).

Volba lehčích 0,5 kilogramových závaží pro ocel a 1 kilogramových závaží pro bronz.

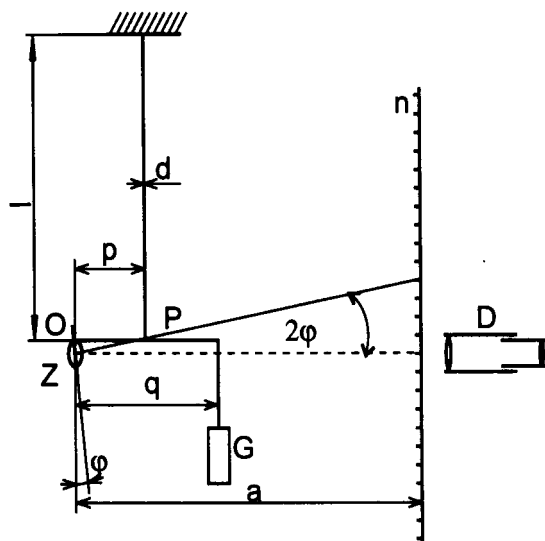
Příprava, nasměrování a zaostření dalekohledu tak, aby se nitkový kříž v dalekohledu kryl se stupnicí, viděnou dalekohledem v zrcátku, vzdálenost  $a$  dalekohledu od zrcátka bude 1 m.

Postupné zatěžování drátu jednotlivými závažími a zapisování příslušného počtu dílků na stupnici viděné v dalekohledu. Zapisování počtu dílků při odebírání závaží. Zopakování měření pro druhý vzorek.

Výpočet modulu pružnosti obou vzorků a porovnání výsledků s tabulkovými hodnotami.

Stanovení chyby měření.

## Schéma měřicího zařízení



## Seznam použitých přístrojů a pomůcek

- měřicí nástroje:** posuvné měřítko,  
mikrometr,  
pásové měřítko
- měřicí pomůcky:** přípravek na měření,  
sada závaží 0,5 a 1 kg,  
dalekohled
- měřené vzorky:** bronzový a ocelový drát

## Tabulky naměřených a vypočtených hodnot

| číslo měření | vzorek č. 1<br>ocelový drát | vzorek č. 2<br>bronzový drát |
|--------------|-----------------------------|------------------------------|
| 1            | 1,208                       | 1,4005                       |
| 2            | 1,207                       | 1,4009                       |
| 3            | 1,208                       | 1,4011                       |
| 4            | 1,209                       | 1,401                        |
| 5            | 1,207                       | 1,401                        |
| 6            | 1,208                       | 1,401                        |
| 7            | 1,207                       | 1,4012                       |
| 8            | 1,208                       | 1,4009                       |
| 9            | 1,209                       | 1,4011                       |
| 10           | 1,21                        | 1,401                        |
| 11           | 1,208                       | 1,401                        |
| 12           | 1,209                       | 1,4009                       |
| 13           | 1,207                       | 1,401                        |
| 14           | 1,208                       | 1,4012                       |
| 15           | 1,209                       | 1,4011                       |
| průměr:      | <b>1,208</b>                | <b>1,4010</b>                |

| číslo měření | ocelový drát |              | bronzový drát |              |
|--------------|--------------|--------------|---------------|--------------|
|              | p [mm]       | q [mm]       | p [mm]        | q [mm]       |
| 1            | 50           | 100          | 50            | 99,9         |
| 2            | 50           | 99,9         | 50            | 100          |
| 3            | 50           | 100          | 50,1          | 100          |
| 4            | 49,9         | 100,1        | 50            | 100          |
| 5            | 50           | 99,9         | 50            | 100          |
| průměr:      | <b>50,0</b>  | <b>100,0</b> | <b>50,0</b>   | <b>100,0</b> |

| vzorek:       | l [mm] | d [mm] | p [mm] | q [mm] |
|---------------|--------|--------|--------|--------|
| ocelový drát  | 1000   | 1,208  | 50     | 100    |
| bronzový drát | 1000   | 1,401  | 50     | 100    |

| <i>ocelový drát</i> |        |        |         |                                |             |
|---------------------|--------|--------|---------|--------------------------------|-------------|
| počet závaží        | $G_i$  | $n_i'$ | $n_i''$ | $n_i = \frac{n_i' + n_i''}{2}$ | $n_i - n_0$ |
| [ks]                | [N]    | [-]    | [-]     | [-]                            | [-]         |
| 0                   | 0      | 34,5   | 34,6    | 34,55                          | 0           |
| 1                   | 4,905  | 35,6   | 35,8    | 35,7                           | 1,15        |
| 2                   | 9,81   | 36,5   | 36,5    | 36,5                           | 1,95        |
| 3                   | 14,715 | 37,1   | 37,1    | 37,1                           | 2,55        |
| 4                   | 19,62  | 37,8   | 37,8    | 37,8                           | 3,25        |
| 5                   | 24,525 | 38,3   | 38,3    | 38,3                           | 3,75        |
| 6                   | 29,43  | 38,8   | 38,8    | 38,8                           | 4,25        |
| 7                   | 34,335 | 39,3   | 39,3    | 39,3                           | 4,75        |
| 8                   | 39,24  | 39,8   | 39,8    | 39,8                           | 5,25        |
| suma                | 176,58 |        |         |                                | 26,9        |

| <i>bronzový drát</i> |        |        |         |                                |             |
|----------------------|--------|--------|---------|--------------------------------|-------------|
| počet závaží         | $G_i$  | $n_i'$ | $n_i''$ | $n_i = \frac{n_i' + n_i''}{2}$ | $n_i - n_0$ |
| [ks]                 | [N]    | [-]    | [-]     | [-]                            | [-]         |
| 0                    | 0      | 25     | 25      | 25                             | 0           |
| 1                    | 9,81   | 26,5   | 26,7    | 26,6                           | 1,6         |
| 2                    | 19,62  | 27,8   | 28      | 27,9                           | 2,9         |
| 3                    | 29,43  | 29,1   | 29,3    | 29,2                           | 4,2         |
| 4                    | 39,24  | 30,4   | 30,6    | 30,5                           | 5,5         |
| 5                    | 49,05  | 31,7   | 31,9    | 31,8                           | 6,8         |
| 6                    | 58,86  | 32,9   | 33      | 32,95                          | 7,95        |
| 7                    | 68,67  | 34,2   | 34,2    | 34,2                           | 9,2         |
| suma                 | 274,68 |        |         |                                | 38,15       |

## Příklad výpočtu, výpočet modulu pružnosti

Určení Youngova modulu pružnosti:

$$E = \frac{8 \cdot a \cdot l \cdot q}{p \cdot d^2 \cdot p^2} \cdot \frac{\sum_i G_i}{\sum_i \Delta n_i}$$

ocel:

$$E = \frac{8 \cdot a \cdot l \cdot q}{p \cdot d^2 \cdot p^2} \cdot \frac{\sum_i G_i}{\sum_i \Delta n_i} = \frac{8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,1}{p \cdot 0,00120^2 \cdot 0,05^2} \cdot \frac{176,58}{26,9} = 458 \text{ GPa}$$

bronz:

$$E = \frac{8 \cdot a \cdot l \cdot q}{p \cdot d^2 \cdot p^2} \cdot \frac{\sum_i G_i}{\sum_i \Delta n_i} = \frac{8 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0,1}{p \cdot 0,0014^2 \cdot 0,05^2} \cdot \frac{274,68}{38,15} = 374 \text{ GPa}$$

## Určení přesnosti měření:

Výpočet pravděpodobné chyby modulu pružnosti v tahu:

V případě, že výsledek je funkcí více proměnných  $f = f(x, y, z, \dots)$ , pravděpodobná chyba výsledku  $J(f)$  je dána jako:

$$J(f) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 J^2(x) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 J^2(y) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 J^2(z) + \dots},$$

kde  $J(x), J(y), J(z), \dots$  jsou pravděpodobné chyby veličin  $x, y, z, \dots$

$$\begin{aligned} \vartheta(E) &= \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial a}\right)^2 \vartheta^2(a) + \left(\frac{\partial E}{\partial l}\right)^2 \vartheta^2(l) + \left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2 \vartheta^2(q) + \left(\frac{\partial E}{\partial d}\right)^2 \vartheta^2(d) + \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)^2 \vartheta^2(p) + \left(\frac{\partial E}{\partial n}\right)^2 \vartheta^2(n) =} \\ &= \sqrt{\left(\frac{8lq \sum G_i}{\pi d^2 p^2 \sum \Delta n_i}\right)^2 \vartheta^2(a) + \left(\frac{8aq \sum G_i}{\pi d^2 p^2 \sum \Delta n_i}\right)^2 \vartheta^2(l) + \left(\frac{8al \sum G_i}{\pi d^2 p^2 \sum \Delta n_i}\right)^2 \vartheta^2(q) +} \\ &\quad + \left(-2 \frac{8alq \sum G_i}{\pi d^3 p^2 \sum \Delta n_i}\right)^2 \vartheta^2(d) + \left(-2 \frac{8alq \sum G_i}{\pi d^2 p^3 \sum \Delta n_i}\right)^2 \vartheta^2(p) + \left(\frac{8alq}{\pi d^2 p^2 \sum \Delta n_i}\right)^2 \vartheta^2(\sum G_i) +} \\ &\quad + \left(\frac{8alq \sum G_i}{\pi d^2 p^2 \sum \Delta n_i}\right)^2 \vartheta^2(\sum \Delta n_i)} \end{aligned}$$

### ocel:

Pravděpodobná chyba měření vzdálenosti  $a$ :  $\vartheta(a) = \pm 0,001$  m.

Pravděpodobná chyba měření délky  $l$ :  $\vartheta(l) = \pm 0,001$  m.

Pravděpodobná chyba měření rozměru  $q$ :

$$J(q) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta q_i)^2} = 0,026 \cdot 10^{-3} \text{ m}; \vartheta(q) = \pm 0,026 \text{ mm}.$$

Pravděpodobná chyba měření rozměru  $p$ :

$$J(p) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta p_i)^2} = 0,015 \cdot 10^{-3} \text{ m}; \vartheta(p) = \pm 0,015 \text{ mm}.$$

Pravděpodobná chyba měření průměru  $d$ :

$$J(d) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta d_i)^2} = 0,16 \cdot 10^{-6} \text{ m}; \vartheta(d) = \pm 0,16 \text{ } \mu\text{m}.$$

Pravděpodobná chyba měření dílků  $n$ :  $\vartheta(n) = \pm 1$ .

Chyba měření modulu pružnosti oceli:  $J(E) = \pm 38 \text{ GPa}$

### bronz:

Pravděpodobná chyba měření vzdálenosti  $a$ :  $\vartheta(a) = \pm 0,001$  m.

Pravděpodobná chyba měření délky  $l$ :  $\vartheta(l) = \pm 0,001$  m.

Pravděpodobná chyba měření rozměru  $q$ :

$$J(q) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta q_i)^2} = 0,015 \cdot 10^{-3} \text{ m}; \vartheta(q) = \pm 0,015 \text{ mm}.$$

Pravděpodobná chyba měření rozměru  $p$ :

$$J(p) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta p_i)^2} = 0,015 \cdot 10^{-3} \text{ m}; \vartheta(p) = \pm 0,015 \text{ mm.}$$

Pravděpodobná chyba měření průměru  $d$ :

$$J(d) = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\Delta d_i)^2} = 0,03 \cdot 10^{-6} \text{ m}; \vartheta(d) = \pm 0,03 \text{ } \mu\text{m.}$$

Pravděpodobná chyba měření dílků  $n$ :  $\vartheta(n) = \pm 1$ .

Chyba měření modulu pružnosti bronz:  $J(E) = \pm 25 \text{ GPa}$

## Zhodnocení výsledků měření

### Výsledek:

Youngův modul pružnosti v tahu oceli je:  $E_{\text{ocel}} = (458 \pm 38) \text{ GPa}$ .

Youngův modul pružnosti v tahu bronz je:  $E_{\text{bronz}} = (374 \pm 25) \text{ GPa}$ .

Naměřené hodnoty se od tabulkových hodnot liší dosti výrazně, neboť tabulkové hodnoty oceli a bronz jsou:  $E_{\text{ocel}} = 220 \text{ GPa}$  a  $E_{\text{bronz}} = 130 \text{ GPa}$  (použity matematicko fyzikální chemické tabulky pro SŠ, SPN 1985).

### Kontrolní otázky:

#### Jak zní Hookův zákon ?

Hookův zákon vyjadřuje vztah mezi relativním prodloužením materiálu a jeho deformačním napětím:

**Deformace je úměrná napětí materiálu.**

Při malých deformacích je konstantou úměry tzv. Youngův modul materiálu:

$$s = E \cdot e$$

#### Co reprezentuje deformační křivka a pro kterou část této křivky platí Hookův zákon ?

Deformační křivka je závislost velikosti tenzoru napětí  $\sigma$  na velikosti tenzoru malých deformací  $\epsilon$ . Během prodlužování (deformaci) tyče se mechanické napětí zvyšuje lineárně až k dosažení mezi úměrnosti, kdy se napětí přestává měnit závisle na prodloužení. Při dalším prodlužování dochází ke „kluzu“, potom se napětí začne zvyšovat do maxima, kterému se říká mez pevnosti. Potom se tyč začne zužovat (zpravidla v jednom místě) až dojde k jejímu přetržení. Hookův zákon platí pouze v lineární části mezi nulovým napětím a napětím kluzu.

#### Jak zní zobecněný Hookův zákon pro izotropní kontinuum ?

V prostředí, jehož vlastnosti jsou ve všech bodech stejné se projevuje tvarová i objemová deformace a zobecněný Hookův zákon zde zní:

$$s_{ij} = l \cdot d_{ij} \cdot \Theta + 2 \cdot m \cdot e_{ij}$$

přičemž  $\delta_{ij}$  je tzv. Kroneckerovo delta, je rovno jedné pokud  $i=j$ , jinak je nulové;  $\lambda, \mu$  jsou Laméovy koeficienty, vyjadřující změnu objemu a modul smyku.

#### Co jsou to síly plošné a objemové ?

Plošná síla působí pouze na povrch tělesa, zatímco objemová síla působí v celém objemu. Například na jedoucí automobil při brždění působí *objemová* síla setrvačná a ve chvíli, kdy naráží do zdi, na něj působí *plošná* síla deformační. Působí-li síla na plochu po její normále, vyvíjí tah nebo tlak, zatímco působí-li tečně k ploše, jde o smyk. Působení plošné síly se projeví i uvnitř tělesa závisle na jeho tuhosti.

#### Co představuje Poissonova konstanta ?

Poissonova konstanta vyjadřuje poměr zúžení a prodloužení tyče.